ESCUELA UNIVERSITARIA DE ESTUDIOS EMPRESARIALES
UNIVERSIDAD DE VALLADOLID

APUNTES DEL CURSO DE PREPARACIÓN PARA LOS ESTUDIOS DE CIENCIAS EMPRESARIALES

LA INTEGRAL INDEFINIDA DE FUNCIONES DE UNA VARIABLE

INTEGRAL INDEFINIDA

1.- DEFINICIÓN Y PROPIEDADES

Si $F(x)$ es una función que posee derivada $F'(x) = f(x)$ en todos los puntos de un intervalo (a , b) se dice que $F(x)$ es una **Función Primitiva** de $f(x)$.

Ejemplo

Sea $f(x) = 4x^3$. Entonces

a) $F(x) = x^4$ es una primitiva de $f(x)$ porque $F'(x) = f(x)$. Efectivamente, $(x^4)' = 4x^3$

b) $F(x) = x^4 + 5$ es otra primitiva de $f(x)$ porque $F'(x) = f(x)$. Efectivamente, $(x^4+5)' = 4x^3$

c) En general, si C es cualquier constante, $F(x) = x^4 + C$ será una primitiva de $f(x)$, porque $(x^4 + C)' = 4x^3$ (Recordar que si C es constante, entonces su derivada es cero).

Añadiendo a F(x) una constante cualquiera C, se obtiene de nuevo una primitiva de f(x)

Recíprocamente,

Teorema:

Si dos funciones $F(x)$ y $G(x)$ son primitivas de una misma función $f(x)$ entonces existirá una constante C tal que $G(x) = F(x) + C$.

Corolario:

Una vez localizada una primitiva $F(x)$ de la función $f(x)$ ya conocemos todas las primitivas de dicha función, porque serán de la forma $F(x) + C$ con C = constante.

Se llama **Integral Indefinida** de $f(x)$, al conjunto de todas las primitivas de $f(x)$. Se designa por

$$\int f(x)dx = F(x)+C$$

De esta forma, para el ejemplo anterior la integral indefinida de $f(x) = 4x^3$ será:

$$\int 4x^3\, dx = x^4+C$$

Así, otros ejemplos sencillos de integrales indefinidas pueden ser los siguientes:

- $\int (6x^5 + 12x^2 - 16x + 5)dx = x^6 + 4x^3 - 8x^2 + 5x + C$ porque

$$(x^6 + 4x^3 - 8x^2 + 5x + C)' = 6x^5 + 12x^2 - 16x + 5$$

- $\int \cos x dx = \operatorname{sen} x + C$ porque $(\operatorname{sen} x + C)' = \cos x$

Propiedades de la Integral Indefinida

1.- La integral de la suma coincide con la suma de las integrales:

$$\int (f(x) + g(x))dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx$$

2.- La integral de la diferencia coincide con la diferencia de las integrales:

$$\int (f(x) - g(x))dx = \int f(x)dx - \int g(x)dx$$

3.- La integral del producto de una constante por una función es igual a la constante por la integral de la función, es decir, las constantes que multiplican o dividen se pueden sacar fuera del signo integral:

$$\int kf(x)dx = k\int f(x)dx \qquad k = \text{constante}$$

4.- En general no es cierto que la integral del producto de dos funciones, coincida con el producto de las integrales, es decir:

$$\int (f(x)g(x))dx \neq \left(\int f(x)dx\right)\left(\int g(x)dx\right)$$

5.- En general no es cierto que la integral del cociente de dos funciones, coincida con el cociente de las integrales, es decir:

$$\int \frac{f(x)}{g(x)}dx \neq \frac{\int f(x)dx}{\int g(x)dx}$$

Veamos a continuación las llamadas integrales inmediatas para posteriormente, hacer ejemplos de aplicación de estas propiedades.

2.- INTEGRALES INMEDIATAS

Integrales inmediatas son aquellas que se deducen directamente de las reglas de derivación. Las más importantes son las siguientes:

$\int dx = x + C$ nota: $\int dx = \int 1 \cdot dx$	$\int K \cdot dx = K \cdot x + C$ con $K = \text{constante}$
$\int x^n \, dx = \dfrac{x^{n+1}}{n+1} + C$ para $n \neq -1$	$\int f^n \cdot f' \cdot dx = \dfrac{f^{n+1}}{n+1} + C$ para $n \neq -1$
$\int \dfrac{1}{x} dx = \text{Ln } x + C$ con $x > 0$	$\int \dfrac{f'}{f} dx = \text{Ln } f + C$ con $f > 0$
$\int a^x \, dx = \dfrac{a^x}{\text{Ln } a} + C$ con $a > 0$	$\int a^f \cdot f' \cdot dx = \dfrac{a^f}{\text{Ln } a} + C$ con $a > 0$
$\int e^x dx = e^x + C$	$\int e^f \cdot f' \cdot dx = e^f + C$
$\int \dfrac{1}{2\sqrt{x}} dx = \sqrt{x} + C$	$\int \dfrac{f'}{2\sqrt{f}} dx = \sqrt{f} + C$
$\int \dfrac{1}{n \sqrt[n]{x^{n-1}}} dx = \sqrt[n]{x} + C$	$\int \dfrac{f'}{n \sqrt[n]{f^{n-1}}} dx = \sqrt[n]{f} + C$
$\int \text{sen} x \, dx = -\cos x + C$	$\int f' \cdot \text{sen}(f) \cdot dx = -\cos(f) + C$
$\int \cos x \, dx = \text{sen } x + C$	$\int f' \cdot \cos(f) \cdot dx = \text{sen}(f) + C$
$\int \dfrac{1}{\cos^2 x} dx = \text{tg } x + C$	$\int \dfrac{f'}{\cos^2(f)} dx = \text{tg}(f) + C$
$\int \dfrac{-1}{\text{sen}^2 x} dx = \text{cotg } x + C$	$\int \dfrac{-f'}{\text{sen}^2(f)} dx = \text{cotg}(f) + C$
$\int \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \text{arc sen } x + C$	$\int \dfrac{f'}{\sqrt{1-f^2}} dx = \text{arc sen}(f) + C$
$\int \dfrac{-1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \text{arc cos } x + C$	$\int \dfrac{-f'}{\sqrt{1-f^2}} dx = \text{arc cos}(f) + C$
$\int \dfrac{1}{1+x^2} dx = \text{arc tg } x + C$ $\int \dfrac{1}{a+x^2} dx = \dfrac{1}{\sqrt{a}} \text{arc tg}\left(\dfrac{x}{\sqrt{a}}\right) + C$ con $a > 0$	$\int \dfrac{f'}{1+f^2} dx = \text{arc tg}(f) + C$ $\int \dfrac{f'}{a+f^2} dx = \dfrac{1}{\sqrt{a}} \text{arc tg}\left(\dfrac{f}{\sqrt{a}}\right) + C$ con $a > 0$

Todas ellas se justifican sin más que calcular la derivada del miembro de la derecha y comprobar que se obtiene la función que está dentro del signo integral. Por ejemplo:

$$\int \frac{1}{2\sqrt{x}} dx = \sqrt{x} + C \quad \text{porque} \quad \left(\sqrt{x} + C\right)' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \operatorname{tg} x + C$ porque $(\operatorname{tg} x)' = \left(\frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}\right)' = \frac{(\operatorname{sen} x)' \cos x - \operatorname{sen} x (\cos x)'}{(\cos x)^2} =$

$= \frac{\cos x \cos x - \operatorname{sen} x (-\operatorname{sen} x)}{\cos^2 x} = \frac{\cos x \cos x + \operatorname{sen} x \operatorname{sen} x}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x + \operatorname{sen}^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}$

$\int \frac{f'}{\sqrt{1-f^2}} dx = \operatorname{arc\,sen}(f) + C$ porque $(\operatorname{arc\,sen}(f) + C)' = \frac{f'}{\sqrt{1-f^2}}$

Nota importante: Si la integral que tratamos de calcular no está contenida en el cuadro de integrales inmediatas, será preciso, mediante métodos apropiados, transformarla debidamente hasta convertirla en otras iguales a ella, pero inmediatas. Pero hay que tener en cuenta que el método que debe emplearse no es inmediato reconocerlo. La habilidad para encontrarlo depende de la práctica y de la intuición. A continuación exponemos algunos métodos de integración:

- Cambio de variable (también llamado método de sustitución)
- Integración por partes
- Integrales racionales

3.- CAMBIO DE VARIABLE. MÉTODO DE SUSTITUCIÓN

Para calcular $\int f(x)dx$ cuando no es inmediata, podemos sustituir la variable x por otra relacionada con ella (cambio de variable). Pero es preciso sustituir x y dx (de ahí la importancia de poner dx en todas las integrales).

Haremos lo siguiente:

a) $x = h(t)$

b) $dx = h'(t)\, dt$

La integral será ahora $\int f(x)dx = \int f(h(t)).h'(t)dt$

ó bien

a') $t = q(x)$

b') $dt = q'(x)\, dx \Rightarrow dx = \frac{dt}{q'(x)}$ y se sustituye en la integral como en el caso anterior.

Si se elige debidamente el cambio de variable, puede ocurrir que la nueva expresión sea una integral inmediata. Calculada ésta, volvemos a la variable primera deshaciendo el cambio de variable, esto es, cambiando ahora t por x.

Veamos algunos ejemplos:

Ejemplo nº 1: $\int 4e^{(7x+5)}dx$

Hacemos t = 7x + 5 $\Rightarrow$ dt = (7x + 5)' dx = 7dx $\Rightarrow$ dx = $\frac{dt}{7}$. Sustituyendo en la integral inicial obtenemos: $\int 4e^{(7x+5)}dx = \int 4e^t \frac{dt}{7} = \frac{4}{7}\int e^t dt = \frac{4}{7}e^t + C$

y sustituyendo t por 7x + 5 obtenemos que $\int 4e^{(7x+5)}dx = \frac{4}{7}e^{(7x+5)} + C$

Ejemplo nº 2: $\int x\sqrt{x-1}dx$

Hacemos $t = \sqrt{x-1} \Rightarrow t^2 = x-1 \Rightarrow 2tdt = 1\cdot dx \Rightarrow dx = 2tdt$. Sustituyendo en la integral inicial obtenemos:

$\int x\sqrt{x-1}dx = =\int (t^2+1)t2tdt = \int (2t^4+2t^2)dt = 2\int t^4 dt + 2\int t^2 dt =$

$= 2\frac{t^5}{5} + 2\frac{t^3}{3} + C$ y sustituyendo t por $\sqrt{x-1}$ obtenemos que

$$\int x\sqrt{x-1}dx = \frac{2}{5}\left(\sqrt{x-1}\right)^5 + \frac{2}{3}\left(\sqrt{x-1}\right)^3 + C$$

ejemplo nº 3: $\int x^3\sqrt{3x^4-12}\,dx$

Hacemos $t = \sqrt{3x^4-12} \Rightarrow t^2 = 3x^4 - 12 \Rightarrow 2tdt = 12x^3dx \Rightarrow dx = \frac{2t}{12x^3}dt = \frac{t}{6x^3}dt$.

Sustituyendo en la integral inicial obtenemos

$$\int x^3\sqrt{3x^4-12}\,dx = \int x^3 t\frac{t}{6x^3}dt = \int\frac{1}{6}t^2dt = \frac{1}{6}\int t^2dt = \frac{1}{6}\cdot\frac{t^3}{3} + C = \frac{t^3}{18} + C$$

y sustituyendo t por $\sqrt{3x^4-12}$ obtenemos que

$$\int x^3\sqrt{3x^4-12}\,dx = \frac{\left(\sqrt{3x^4-12}\right)^3}{18} + C$$

Ejercicios Propuestos:

a) $\int\frac{x}{1+\left(x^2+4\right)^2}dx$ **b)** $\int 5x^2\,\mathrm{sen}(x^3)dx$ **c)** $\int\frac{\mathrm{Ln}x}{x}dx$

d) $\int e^{9x+5}dx$ **e)** $\int\left(e^x+2\right)^{25}e^x\,dx$ **f)** $\int 3x\sqrt{2+7x^2}\,dx$

4.- MÉTODO DE INTEGRACIÓN POR PARTES

Sean u = u(x) y v = v(x) dos funciones derivables. Se tiene entonces:

d(u.v) = u.dv + v.du $\Rightarrow$ u.dv = d(u.v) - v.du y por ello $\int u.dv=\int d(u.v)-\int v.du$

y como $\int d(u.v) = u.v$ llegamos a la siguiente igualdad:

$$\boxed{\int u\cdot dv = u\cdot v - \int v\cdot du}$$

Suele utilizarse este método en los casos:

P(x).$e^{f(x)}$, P(x).Ln(f(x)) , P(x).sen(f(x)) , P(x).cos(f(x)) , $e^{g(x)}$.sen(f(x)) , $e^{g(x)}$.cos(f(x)) donde P(x) denota un polinomio, y f(x), g(x) funciones derivables de una variable.

La utilización de este método no es exclusiva ni excluyente a estos 6 tipos de funciones, es decir: Hay funciones que no son de esta forma pero que sí se pueden integrar por partes (por ejemplo $\int \mathrm{arcsen}x\,dx$), y hay funciones que, aun siendo de alguno de estos 6 tipos, no se puede integrar por partes (por ejemplo $\int xe^{x^3}dx$).

Ejemplo nº 1: $\int x \operatorname{sen} x \, dx$

Llamamos $u = x \Rightarrow du = (x)'dx = dx$

$dv = \operatorname{sen} x \, dx \Rightarrow v = \int \operatorname{sen} x dx = -\cos x$

Por consiguiente $\int x.\operatorname{sen} x dx = x.(-\cos x) - \int -\cos x dx = -x.\cos x + \int \cos x dx =$

$= -x.\cos x + \operatorname{sen} x + C$, esto es

$$\int x.\operatorname{sen} x dx = -x.\cos x + \operatorname{sen} x + C$$

Ejemplo nº 2: $\int x^3 \operatorname{Ln} x dx$

Llamamos $u = \operatorname{Ln} x \Rightarrow du = (\operatorname{Ln} x)'dx = \frac{1}{x} dx$

$dv = x^3 dx \Rightarrow v = \int x^3 dx = \frac{x^4}{4}$

Por consiguiente $\int x^3 \operatorname{Ln} x dx = (\operatorname{Ln} x) \frac{x^4}{4} - \int \frac{x^4}{4} \frac{1}{x} dx = \frac{x^4 \operatorname{Ln} x}{4} - \frac{1}{4} \int x^3 dx =$

$= \frac{x^4 \operatorname{Ln} x}{4} - \frac{1}{4} \frac{x^4}{4} + C = \frac{x^4 \operatorname{Ln} x}{4} - \frac{x^4}{16} + C$ esto es:

$$\int x^3 . \operatorname{Ln} x dx = \frac{x^4 \operatorname{Ln} x}{4} - \frac{x^4}{16} + C$$

Ejemplo nº 3: $\int \operatorname{arcsen} x dx$

Llamamos $u = \operatorname{arc\,sen} x \Rightarrow du = (\operatorname{arc\,sen} x)'dx = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx$

$dv = dx \Rightarrow v = \int dx = x$

Por consiguiente: $\int \operatorname{arcsen} x dx = (\operatorname{arc\,sen} x).x - \int x.\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx =$

$= x.\operatorname{arc\,sen} x - \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} dx$

Para calcular esta última integral aplicaremos el método de cambio de variable:

$t = \sqrt{1-x^2} \Rightarrow dt = \frac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}} dx = \frac{-x}{\sqrt{1-x^2}} dx \Rightarrow$

$$\int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}dx = -\int \frac{-x}{\sqrt{1-x^2}}dx = -\int dt = -t$$

Deshaciendo el cambio de variable, es decir, sustituyendo t por $\sqrt{1-x^2}$ obtenemos que

$\int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}dx = -\sqrt{1-x^2}$ y podemos concluir que

$\int \text{arcsen}x dx = x.\text{arc sen } x - \left(-\sqrt{1-x^2}\right) + C = x\cdot\text{arcsen } x + \sqrt{1-x^2} + C \Rightarrow$

$$\int \text{arcsen}x dx = x\cdot\text{arcsen } x + \sqrt{1-x^2} + C$$

Ejercicios Propuestos:

a) $\int xe^{2x}dx$ **b)** $\int x^2e^x dx$ **c)** $\int x\text{Ln}x dx$

d) $\int x^3\text{sen}x dx$ **e)** $\int x^{10}\text{Ln}x dx$ **f)** $\int (x^2+5x-9)e^{-2x}dx$

5.- INTEGRACIÓN DE FUNCIONES RACIONALES

Definición: Se denomina **Integral Racional** a la integral de una función racional, es decir, una función que es cociente de dos polinomios:

$$\int \frac{P_n(x)}{P_m(x)}dx \quad \text{, n y m son los grados de los polinomios.}$$

Ejemplos de integrales racionales son los siguientes:

a) $\int \frac{x^3+5x^2+3x-9}{x^2+x}dx$ donde el numerador es un polinomio de grado 3 y el denominador es un polinomio de grado 2.

b) $\int \frac{x^2-3x-2}{x^4+6x^3+13x^2+12x+4}dx$ donde el numerador es un polinomio de grado 2 y el denominador es un polinomio de grado 4.

c) $\int \frac{x}{x^3 - x^2 + x - 1}\,dx$ donde el numerador es un polinomio de grado 1 y el denominador es un polinomio de grado 3.

d) $\int \frac{x^3 + 3x^2 + 3x + 1}{x^3 - x^2 + x - 1}\,dx$ donde numerador y denominador son polinomios de grado 3.

e) $\int \frac{x^3}{x^2 + 1}\,dx$ donde el numerador es un polinomio de grado 3 y el denominador es un polinomio de grado 2.

Para resolver las integrales racionales seguiremos los pasos siguientes, que iremos efectuando en el ejemplo a) anterior, esto es: $\int \frac{x^3 + 5x^2 + 3x - 9}{x^2 + x}\,dx$

PASO 1.- División del numerador entre el denominador si n ≥ m

Lo primero que debemos hacer es mirar los grados de los polinomios del numerador y del denominador. Si el grado del numerador es mayor o igual que el grado del denominador, dividimos los polinomios hasta que el grado del numerador sea menor estrictamente que el grado del denominador.

Recordemos la siguiente regla: $\frac{P_n(x)}{P_m(x)} = C(x) + \frac{R(x)}{P_m(x)}$ donde C(x) es el cociente de la división y R(x) es el resto de la misma.

$\frac{x^3 + 5x^2 + 3x - 9}{x^2 + x} = (x + 4) + \frac{-x - 9}{x^2 + x}$ donde (x + 4) es el cociente de dividir x^3+5x^2+3x-9 entre $x^2 + x$, y (-x - 9) es el resto.

Si el grado del numerador hubiese sido menor estrictamente que el grado del denominador no hay que realizar esta división.

PASO 2.- Factorización del denominador

Se factoriza el denominador, si es que aún no lo está, con el fin de dividir esta fracción en otras fracciones elementales, es decir, más simples para poder integrar. En nuestro caso es muy sencillo , porque $x^2 + x = x\,(x + 1)$.

<u>PASO 3</u>.- Descomposición en fracciones simples

Una vez factorizado el denominador, vamos a calcular los valores A y B para que se verifique la siguiente igualdad:

$$\frac{-x-9}{x^2+x} = \underbrace{\frac{A}{x} + \frac{B}{x+1}}_{\substack{\text{fracciones}\\ \text{elementales}}}$$

Calcular A y B no tiene ninguna dificultad. Lo vemos:

$$\frac{-x-9}{x^2+x} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+1} = \frac{A(x+1)+Bx}{x(x+1)} = \frac{Ax+A+Bx}{x^2+x} = \frac{(A+B)x+A}{x^2+x} \Rightarrow$$

$$\frac{-x-9}{x^2+x} = \frac{(A+B)x+A}{x^2+x}$$

Puesto que ambas fracciones son iguales, y además tienen el mismo denominador, entonces deben tener el mismo numerador $\Rightarrow$

$$- x - 9 = (A + B)\,x + A$$

También es conocido que, para que dos polinomios sean iguales, han de tener los mismos coeficientes y el mismo término independiente:

Coeficiente de x: $A + B = -1$

Término independiente: $A = -9$

Surge así un sistema de 2 ecuaciones con dos incógnitas muy sencillo de resolver: $A = -9$, $B = 8$.

Con esto hemos conseguido tener la siguiente igualdad $\frac{-x-9}{x^2+x} = \frac{-9}{x} + \frac{8}{x+1}$ siendo las dos fracciones últimas muy fáciles de integrar.

PASO 4.- Integración de todos los sumandos obtenidos

Una vez descompuesta la fracción resultante en fracciones simples se procede a integrar todos los términos obtenidos:

$$\int \frac{x^3+5x^2+3x-9}{x^2+x}dx = \int\left(x+4+\frac{-9}{x}+\frac{8}{x+1}\right)dx =$$

$$= \frac{x^2}{2}+4x-9\int\frac{1}{x}dx + 8\int\frac{1}{x+1}dx = \frac{x^2}{2}+4x-9\text{Ln}|x|+8\,\text{Ln}|x+1|+C$$

concluyendo que $\int \frac{x^3+5x^2+3x-9}{x^2+x}dx = \frac{x^2}{2}+4x-9\text{Ln}|x|+8\text{Ln}|x+1|+C$

Vamos a resolver el ejemplo **b)** siguiendo estos cuatro pasos. Recordemos que la integrar que queremos calcular es $\int \frac{x^2-3x-2}{x^4+6x^3+13x^2+12x+4}dx$

PASO 1.-

Como el grado del numerador es menor estrictamente que el del denominador, no hay que efectuar la división.

PASO 2.-

Factorizamos el denominador. $x^4 + 6x^3 + 13x^2 + 12x + 4 = (x+1)^2\,(x+2)^2$ sin más que aplicar Ruffini tantas veces como sea necesario.

PASO 3.-

Realizamos la descomposición en fracciones simples de la forma siguiente:

$$\frac{x^2-3x-2}{x^4+6x^3+13x^2+12x+4} = \frac{A}{x+1}+\frac{B}{(x+1)^2}+\frac{C}{x+2}+\frac{D}{(x+2)^2} =$$

$$= \frac{A(x+1)(x+2)^2+B(x+2)^2+C(x+1)^2(x+2)+D(x+1)^2}{(x+1)^2(x+2)^2} =$$

$$\frac{(A+C)x^3+(5A+B+4C+D)x^2+(8A+4B+5C+2D)x+(4A+4B+2C+D)}{(x+1)^2(x+2)^2}$$

Puesto que ambas fracciones son iguales, y además tienen el mismo denominador, entonces deben tener el mismo numerador $\Rightarrow$

$x^2 - 3x - 2 = (A+C)x^3 + (5A+B+4C+D)x^2 + (8A+4B+5C+2D)x + (4A+4B+2C+D) \Rightarrow$

$$\left.\begin{array}{r} A + \quad C \;= 0 \\ 5A + B + 4C + D = 1 \\ 8A + 4B + 5C + 2D = -3 \\ 4A + 4B + 2C + D = -2 \end{array}\right\}$$

Sistema lineal de cuatro ecuaciones con cuatro incógnitas cuya única solución vale:

$A = -9$, $B = 2$, $C = 9$, $D = 8$. Con esto hemos conseguido tener la siguiente igualdad: $\dfrac{x^2 - 3x - 2}{x^4 + 6x^3 + 13x^2 + 12x + 4} = \dfrac{-9}{x+1} + \dfrac{2}{(x+1)^2} + \dfrac{9}{x+2} + \dfrac{8}{(x+2)^2}$

PASO 4.-

Una vez descompuesta la fracción resultante en fracciones simples se procede a integrar todos los términos obtenidos:

$$\int \frac{x^2 - 3x - 2}{x^4 + 6x^3 + 13x^2 + 12x + 4}dx = \int \frac{-9}{x+1}dx + \int \frac{2}{(x+1)^2}dx + \int \frac{9}{x+2}dx + \int \frac{8}{(x+2)^2}dx =$$

$$= -9 \text{ Ln}\left|x + 1\right| - \frac{2}{x+1} + 9 \text{ Ln}\left|x + 2\right| - \frac{8}{x+2} + C$$

Vamos a resolver el ejemplo **c)** siguiendo estos cuatro pasos. Recordemos que la integrar que queremos calcular es $\displaystyle\int \frac{x}{x^3 - x^2 + x - 1}dx$

PASO 1.-

Como el grado del numerador es menor estrictamente que el del denominador, no hay que efectuar la división.

PASO 2.-

Factorizamos el denominador: $x^3 - x^2 + x - 1 = (x - 1)(x^2 + 1)$. Obsérvese que el polinomio de segundo grado $x^2 + 1$ no tiene raíces reales.

PASO 3.-

Realizamos la descomposición en fracciones simples de la forma siguiente:

$$\frac{x}{x^3 - x^2 + x - 1} = \frac{A}{x-1} + \frac{Bx + C}{x^2 + 1} = \frac{A(x^2+1) + (Bx+C)(x-1)}{(x-1)(x^2+1)} =$$

$$= \frac{(A+B)x^2 + (-B+C)x + (A-C)}{(x-1)(x^2+1)}$$

Puesto que ambas fracciones son iguales, y además tienen el mismo denominador, entonces deben tener el mismo numerador $\Rightarrow$

$x = (A + B)\,x^2 + (-\,B + C)\,x + (A - C) \quad \Rightarrow$

$$\left.\begin{aligned} A + B &= 0 \\ -B + C &= 1 \\ A - C &= 0 \end{aligned}\right\}$$

Sistema lineal de tres ecuaciones con tres incógnitas cuya única solución vale:

$A = \frac{1}{2}$, $B = -\frac{1}{2}$, $C = \frac{1}{2}$. Con esto hemos conseguido tener la siguiente igualdad: $\frac{x}{x^3 - x^2 + x - 1} = \frac{\frac{1}{2}}{x-1} + \frac{\frac{-1}{2}x + \frac{1}{2}}{x^2+1}$

PASO 4.-

Una vez descompuesta la fracción resultante en fracciones simples se procede a integrar todos los términos obtenidos:

$$\int \frac{x}{x^3 - x^2 + x - 1}dx = \int \frac{\frac{1}{2}}{x-1}dx + \int \frac{\frac{-1}{2}x + \frac{1}{2}}{x^2+1}dx =$$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{1}{x-1}dx - \frac{1}{2}\int \frac{x}{x^2+1}dx + \frac{1}{2}\int \frac{1}{x^2+1}dx =$$

$$= \frac{1}{2}\mathrm{Ln}|x-1| - \frac{1}{4}\int \frac{2x}{x^2+1}dx + \frac{1}{2}\mathrm{arctg}x =$$

$$= \frac{1}{2}\mathrm{Ln}|x-1| - \frac{1}{4}\mathrm{Ln}(x^2+1) + \frac{1}{2}\mathrm{arctg}x + C$$

Los ejemplos **d)** y **e)** se resuelven de manera análoga, obteniendo los siguientes resultados:

d) $\int \frac{x^3+3x^2+3x+1}{x^3-x^2+x-1}dx = 2 \text{ arctg } x + 4 \text{ Ln } |x-1| + x + C$

e) $\int \frac{x^3}{x^2+1} dx = \frac{x^2}{2} - \frac{\text{Ln}(x^2+1)}{2} + C$

Ejercicios Propuestos:

a) $\int \frac{2x+1}{(x+2)(x-1)^2} dx$ **b)** $\int \frac{2x^3+4x^2+3}{x^2+x-2} dx$ **c)** $\int \frac{1}{x^2-4} dx$

d) $\int \frac{4x^3-21x^2+38x-23}{x^4-8x^3+24x^2-32x+16} dx$ **e)** $\int \frac{x+1}{(x-2)(x^2+3)} dx$

f) $\int \frac{x}{x^3+6x^2+11x+6} dx$

EJERCICIOS DE REPASO

Resolvamos ahora diferentes integrales con los métodos estudiados. En alguna de ellas será necesario el uso de al menos dos métodos.

1) $\int e^{\sqrt{x}} dx$ **2)** $\int \frac{1-e^{3x}+e^{4x}}{e^{2x}} dx$ **3)** $\int \frac{\sqrt[3]{x}}{\sqrt{x}-\sqrt[6]{x^5}} dx$

4) $\int e^x \operatorname{sen} x dx$ **5)** $\int (x^3-4x^2+7x+6)e^{5x} dx$

6) Calcular una función que toma el valor 38 en el punto x = 3 , y cuya derivada es:

$$f'(x) = 6x^2 + 2x - 10$$

7) Determinar la ecuación de la curva que pasa por el punto P = (10,2) y cuya derivada en cada punto x está dada por $f'(x) = 2x - \frac{3}{x}$.

8) Hallar la primitiva de la función $f(x) = (x^2 + 1)e^x$ que se anula para $x = 1$.

SOLUCIONES DE LOS EJERCICIOS PROPUESTOS

Cambio de variable

a) $\dfrac{\operatorname{arctg}(x^2+4)}{2} + C$ Cambio de variable $t = x^2 + 4$

b) $\dfrac{-5\cos(x^3)}{3} + C$ Cambio de variable $t = x^3$

c) $\dfrac{\operatorname{Ln}^2 x}{2} + C$ Cambio de variable $t = \operatorname{Ln} x$

d) $\dfrac{e^{9x+5}}{9} + C$ Cambio de variable $t = 9x + 5$

e) $\dfrac{\left(e^x + 2\right)^{26}}{26} + C$ Cambio de variable $t = e^x + 2$

f) $\dfrac{1}{7}\left(2 + 7x^2\right)^{3/2} + C$ Cambio de variable $t = \sqrt{2 + 7x^2}$

Integración por Partes

a) $\dfrac{1}{2}xe^{2x} - \dfrac{1}{4}e^{2x} + C = e^{2x}\left(\dfrac{x}{2} - \dfrac{1}{4}\right) + C$

b) $e^x\left(x^2 - 2x + 2\right) + C$

c) $\dfrac{x^2}{2}\left(\operatorname{Lnx} - \dfrac{1}{2}\right) + C$

d) $-x^3\cos x + 3x^2\operatorname{sen} x + 6x\cos x - 6\operatorname{sen} x + C$

e) $\dfrac{x^{11}\operatorname{Lnx}}{11} - \dfrac{x^{11}}{121} + C$

f) $-\dfrac{e^{-2x}\left(x^2+6x-6\right)}{2}+C$

Integración de funciones racionales

a) $\dfrac{-1}{3}\mathrm{Ln}|x+2| + \dfrac{1}{3}\mathrm{Ln}|x-1| - \dfrac{1}{x-1} + C$

b) $x^2+2x+3\mathrm{Ln}|x-1| - \mathrm{Ln}|x+2| + C$

c) $\dfrac{1}{4}\mathrm{Ln}|x-2| - \dfrac{1}{4}\mathrm{Ln}|x+2| + C$

d) $4\mathrm{Ln}|x-2| - \dfrac{1}{3(x-2)^3} - \dfrac{1}{(x-2)^2} - \dfrac{3}{x-2} + C$

e) $\dfrac{3}{7}\mathrm{Ln}(x-2) - \dfrac{3}{14}\mathrm{Ln}\left(x^2+3\right) + \dfrac{1}{7\sqrt{3}}\,\mathrm{arctg}\left(\dfrac{x}{\sqrt{3}}\right) + C$

f) $-\dfrac{3\mathrm{Ln}|x+3|}{2} + 2\mathrm{Ln}|x+2| - \dfrac{\mathrm{Ln}|x+1|}{2} + C$

Soluciones de los ejercicios de repaso

1) $\int e^{\sqrt{x}}\,dx$ **(Cambio de variable + integración por partes)**

Efectuamos el cambio de variable $t=\sqrt{x} \Rightarrow \left.\begin{matrix} x=t^2 \\ dx=2tdt \end{matrix}\right]$. Sustituimos en la integral inicial obteniendo la integral siguiente, que resolveremos utilizando el método de integración por partes: $\int e^{\sqrt{x}}\,dx = \int e^t\, 2tdt = 2\int te^t\,dt$

$$\left.\begin{matrix} u=t \Rightarrow du=1dt=dt \\ dv=e^t dt \Rightarrow v=\int e^t dt=e^t \end{matrix}\right) \Rightarrow 2\int te^t dt = 2\left(te^t - \int e^t dt\right) = 2\left(te^t - e^t\right) + C$$

y, deshaciendo el cambio de variable, es decir, cambiando ahora t por $\sqrt{x}$ obtenemos que $\int e^{\sqrt{x}}\,dx = 2\left(\sqrt{x}\,e^{\sqrt{x}} - e^{\sqrt{x}}\right) + C = 2e^{\sqrt{x}}\left(\sqrt{x}-1\right) + C$

2) $\int \dfrac{1-e^{3x}+e^{4x}}{e^{2x}}\,dx$ **(Cambio de variable + Integral racional)**

Efectuamos el cambio de variable $t = e^x \Rightarrow dt=e^x dx \Rightarrow dx = \frac{dt}{e^x} = \frac{dt}{t}$. Obsérvese que $e^{3x} = (e^x)3 = t^3$; Análogamente: $e^{4x} = t^4$ y $e^{2x} = t^2$. Sustituimos en la integral inicial obteniendo la integral siguiente, que resolveremos utilizando el método de integración de funciones racionales:

$$\int \frac{1-e^{3x}+e^{4x}}{e^{2x}}dx = \int \frac{1-t^3+t^4}{t^2}\frac{dt}{t} = \int \frac{t^4-t^3+1}{t^3}dt$$

Paso 1.- Como el grado del numerador es mayor que el grado del denominador, en primer lugar efectuamos la división de $t^4 - t^3 + 1$ entre t^3 .

$$\frac{t^4-t^3+1}{t^3} = t-1+\frac{1}{t^3}$$

Los **pasos 2 y 3** del método de integración de funciones racionales no son necesarios realizarlos porque la fracción resultante, esto es, $\frac{1}{t^3}$, se integra de manera inmediata. en consecuencia pasamos al **paso 4.-**

$$\int \frac{t^4-t^3+1}{t^3}dt = \int tdt - \int 1dt + \int \frac{1}{t^3}dt = \frac{t^2}{2} - t + \int t^{-3}dt = \frac{t^2}{2} - t + \frac{t^{-2}}{-2} + C \Rightarrow$$

$\int \frac{t^4-t^3+1}{t^3}dt = \frac{t^2}{2} - t - \frac{1}{2t^2} + C$. Deshaciendo el cambio de variable, esto es, cambiando ahora t por e^x obtenemos que:

$$\int \frac{1-e^{3x}+e^{4x}}{e^{2x}}dx = \frac{(e^x)^2}{2} - e^x - \frac{1}{2(e^x)^2} + C = \frac{e^{2x}}{2} - e^x - \frac{1}{2e^{2x}} + C$$

3) $\int \frac{\sqrt[3]{x}}{\sqrt{x}-\sqrt[6]{x^5}}dx$ **(Cambio de variable + Integral racional)**

Efectuamos el cambio de variable $x = t^6$.

Observar que hemos elegido la potencia 6 por ser la más pequeña que me permite quitar simultáneamente las tres raíces que aparecen en el integrando; es decir, pondremos en este caso $x = t^{\text{m.c.m.}(2,3,6)} = t^6$.

Entonces $dx = 6\,t^5\,dt \Rightarrow \int \frac{\sqrt[3]{x}}{\sqrt{x}-\sqrt[6]{x^5}}\,dx = \int \frac{\sqrt[3]{t^6}}{\sqrt{t^6}-\sqrt[6]{\left(t^6\right)^5}}\,6t^5\,dt =$

$$= \int \frac{t^2}{t^3-t^5}\,6t^5\,dt = 6\int \frac{t^7}{t^3-t^5}\,dt = 6\int \frac{t^4}{1-t^2}\,dt$$

Resolveremos esta última integral utilizando el método de integración de funciones racionales.

PASO 1.-Como el grado del numerador es mayor que el grado del denominador, en primer lugar efectuamos la division de t^4 entre $1 - t^2$.

$$\frac{t^4}{1-t^2} = -t^2 - 1 + \frac{1}{1-t^2}$$

PASO 2.- Factorizamos el denominador: $1 - t^2 = (1 - t)\,(1 + t)$

PASO 3.- Realizamos la descomposición en fracciones simples de la forma siguiente:

$$\frac{1}{1-t^2} = \frac{A}{1-t} + \frac{B}{1+t} = \frac{A(1+t)+B(1-t)}{(1-t)(1+t)} = \frac{(A-B)t+(A+B)}{(1-t)(1+t)}$$

Puesto que ambas fracciones son iguales, y además tienen el mismo denominador, entonces deben tener el mismo numerador $\Rightarrow$

$$1 = (A - B)\,t + (A + B) \quad \Rightarrow \left.\begin{array}{r} A-B=0 \\ A+B=1 \end{array}\right\}$$

Sistema lineal de dos ecuaciones con dos incógnitas cuya única solución vale:

$A = \frac{1}{2}$, $B = \frac{1}{2}$. Con esto hemos conseguido tener la siguiente igualdad:

$$\frac{1}{1-t^2} = \frac{\frac{1}{2}}{1-t} + \frac{\frac{1}{2}}{1+t} = \frac{1}{2}\frac{1}{1-t} + \frac{1}{2}\frac{1}{1+t}$$

PASO 4.- Una vez descompuesta la fracción resultante en fracciones simples se procede a integrar todos los términos obtenidos:

$$6\int \frac{t^4}{1-t^2}\,dt = 6\int\left(-t^2-1+\frac{1}{1-t^2}\right)dt = 6\int\left(-t^2-1+\frac{1}{2}\frac{1}{1-t}+\frac{1}{2}\frac{1}{1+t}\right)dt =$$

$$-6\frac{t^3}{3}-6t-3Ln|1-t|+3Ln|1+t|+C=-2t^3-6t-3Ln|1-t|+3Ln|1+t|+C$$

Deshaciendo el cambio de variable, esto es, cambiando ahora t por $\sqrt[6]{x}$ obtenemos que:

$$\int\frac{\sqrt[3]{x}}{\sqrt{x}-\sqrt[6]{x^5}}dx=-2\left(\sqrt[6]{x}\right)^3-6\sqrt[6]{x}-3Ln\left|1-\sqrt[6]{x}\right|+3Ln\left|1+\sqrt[6]{x}\right|+C=$$

$$=-2\sqrt{x}-6\sqrt[6]{x}-3Ln\left|1-\sqrt[6]{x}\right|+3Ln\left|1+\sqrt[6]{x}\right|+C$$

4) $\int e^x \operatorname{sen} x dx$ **(Integración por partes dos veces). Integral cíclica.**

$$\left.\begin{array}{c} u=\operatorname{sen}x \Rightarrow du=\cos x dt \\ dv=e^t dt \Rightarrow v=\int e^t dt=e^t \end{array}\right) \Rightarrow \int e^x \operatorname{sen} x dx=(\operatorname{sen}x)e^x-\int(\cos x)e^x dx$$

$$\left.\begin{array}{c} u=\cos x \Rightarrow du=-\operatorname{sen}x dt \\ dv=e^t dt \Rightarrow v=\int e^t dt=e^t \end{array}\right) \Rightarrow$$

$$\int e^x \operatorname{sen} x dx=(\operatorname{sen}x)e^x-\left[(\cos x)e^x-\int(-\operatorname{sen}x)e^x dx\right]=$$

$= e^x \operatorname{sen}x-e^x\cos x-\int e^x \operatorname{sen} x dx$. Hemos demostrado entonces, de ahí el nombre de integral cíclica, que:

$\int e^x \operatorname{sen} x dx=e^x \operatorname{sen}x-e^x\cos x-\int e^x \operatorname{sen} x dx$ por lo que

$$2\int e^x \operatorname{sen} x dx=e^x \operatorname{sen}x-e^x\cos x \Rightarrow \int e^x \operatorname{sen} x dx=\frac{e^x \operatorname{sen}x-e^x\cos x}{2}+C$$

Análogamente, se puede comprobar que $\int e^x \cos x dx=\dfrac{e^x \operatorname{sen}x+e^x\cos x}{2}+C$

5) $\int(x^3-4x^2+7x+6)e^{5x}dx$ **(Integración por partes tres veces).**

$$\left.\begin{array}{r} u=x^3-4x^2+7x+6 \Rightarrow du=(3x^2-8x+7)dx \\ dv=e^{5x}dt \quad \Rightarrow v=\int e^{5x}dx=\dfrac{e^{5x}}{5} \end{array}\right) \Rightarrow$$

$$\int (x^3-4x^2+7x+6)e^{5x}dx = (x^3-4x^2+7x+6)\frac{e^{5x}}{5} - \int \frac{e^{5x}}{5}(3x^2-8x+7)dx =$$

$$= (x^3-4x^2+7x+6)\frac{e^{5x}}{5} - \frac{1}{5}\int (3x^2-8x+7)e^{5x}dx = (*)$$

$$\left.\begin{array}{r} u=3x^2-8x+7 \Rightarrow du=(6x-8)dx \\ dv=e^{5x}dt \quad \Rightarrow v=\int e^{5x}dx=\dfrac{e^{5x}}{5} \end{array}\right)$$

$$(*)= (x^3-4x^2+7x+6)\frac{e^{5x}}{5} - \frac{1}{5}\left[\left(3x^2-8x+7\right)\frac{e^{5x}}{5} - \int \frac{e^{5x}}{5}\left(6x-8\right)dx\right] =$$

$$= \frac{1}{5}(x^3-4x^2+7x+6)e^{5x} - \frac{1}{25}\left(3x^2-8x+7\right)e^{5x} + \frac{1}{25}\int \left(6x-8\right)e^{5x}dx = (**)$$

$$\left.\begin{array}{r} u=6x-8 \Rightarrow du=6dx \\ dv=e^{5x}dt \Rightarrow v=\int e^{5x}dx=\dfrac{e^{5x}}{5} \end{array}\right)$$

$$(**) = \frac{1}{5}(x^3-4x^2+7x+6)e^{5x}\ \frac{1}{25}\left(3x^2-8x+7\right)e^{5x} + \frac{1}{25}\left[\left(6x-8\right)\frac{e^{5x}}{5} - \int \frac{e^{5x}}{5}6dx\right] =$$

$$= \frac{1}{5}(x^3-4x^2+7x+6)e^{5x} - \frac{1}{25}\left(3x^2-8x+7\right)e^{5x} + \frac{1}{125}\left(6x-8\right)e^{5x} - \frac{6}{125}\int e^{5x}dx =$$

$$= \frac{1}{5}(x^3-4x^2+7x+6)e^{5x} - \frac{1}{25}\left(3x^2-8x+7\right)e^{5x} + \frac{1}{125}\left(6x-8\right)e^{5x} - \frac{6}{125}\frac{e^{5x}}{5} + C =$$

$$= \frac{1}{5}(x^3-4x^2+7x+6)e^{5x} - \frac{1}{25}\left(3x^2-8x+7\right)e^{5x} + \frac{1}{125}\left(6x-8\right)e^{5x} - \frac{6}{625}e^{5x} + C =$$

$$= \left(\frac{1}{5}(x^3-4x^2+7x+6) - \frac{1}{25}\left(3x^2-8x+7\right) + \frac{1}{125}\left(6x-8\right) - \frac{6}{625}\right)e^{5x} + C =$$

$$= \left(\frac{1}{5}x^3 - \frac{23}{25}x^2 + \frac{221}{125}x + \frac{529}{625}\right)e^{5x} + C$$

6) Calcula una función que toma el valor 38 en el punto x = 3, y cuya derivada es:

$$f'(x) = 6x^2 + 2x - 10$$

solución

Como conocemos f´(x) y queremos calcular f(x) tendremos que integrar. En concreto

$f(x) = \int f'(x)dx = \int (6x^2 + 2x - 10)dx = 2x^3 + x^2 - 10x + C$

Ahora bien, para determinar el valor de C sabemos que f(3) = 38 es decir:

$f(3) = 2\,(3)^3 + (3)^2 - 10(3) + C = 38 \Rightarrow 33 + C = 38 \Rightarrow C = 5$, por lo que la función pedida es $f(x) = 2x^3 + x^2 - 10x + 5$.

7) Determinar la ecuación de la curva que pasa por el punto P = (10 , 2) y cuya derivada en cada punto x está dada por $f'(x) = 2x - \frac{3}{x}$.

solución

Como conocemos f´(x) y queremos calcular f(x) tendremos que integrar. En concreto

$f(x) = \int f'(x)dx = \int \left(2x - \frac{3}{x}\right)dx = x^2 - 3\text{Ln}x + C$

Ahora bien, para determinar el valor de C sabemos que f(10) = 2 es decir:

$f(10) = (10)^2 - 3\,\text{Ln}(10) + C = 2 \Rightarrow C = 3\,\text{Ln}(10) - 98 \Rightarrow$ la ecuación pedida es:

$$f(x) = x^2 - 3\,\text{Ln}\,x + 3\text{Ln}(10) - 98$$

8) Hallar la primitiva de la función $f(x) = (x^2 + 1)e^x$ que se anula para x = 1.

solución

Calculemos en primer lugar la expresión de las primitivas de f(x), es decir, su integral indefinida $\int (x^2 + 1)e^x dx$. Para ello aplicamos el método de integración por partes:

$$\left.\begin{array}{l} u = x^2 + 1 \Rightarrow du = 2xdx \\ dv = e^x dt \Rightarrow v = \int e^x dx = e^x \end{array}\right\} \Rightarrow \int (x^2 + 1)e^x dx = (x^2 + 1)e^x - \int e^x\, 2xdx = (*)$$

$$\left.\begin{array}{l} u = 2x \Rightarrow du = 2dx \\ dv = e^x dt \Rightarrow v = \int e^x dx = e^x \end{array}\right\}$$

$(*) = (x^2+1)e^x - \left(2xe^x - \int e^x\, 2dx\right) = (x^2 + 1)e^x - 2xe^x + 2e^x + C = e^x (x^2 - 2x + 3) + C$

En el punto x = 1 queremos que esta integral tome el valor 0 , es decir

$e^1((1)^2 - 2(1) + 3) + C = 0 \Rightarrow C = 2e$. La primitiva pedida será entonces:

$$e^x (x^2 - 2x + 3) + 2e$$

BIBLIOGRAFÍA

Además de los libros de Bachillerato, donde esta materia viene muy bien explicada, y con abundantes problemas, recomendamos para hacer más ejercicios los libros siguientes:

ALBADALEJO, I.P. y otros (2001): *Problemas de cálculo para la Economía y la Empresa*. Ed. Tébar.

COQUILLAT, FERNANDO (1997): *Cálculo integral. Metodología y Problemas.* Ed. Tébar Flores.

LLUÍS BERMÚDEZ y otros (1995): *Cálculo Integral. Colección Domina sin dificultad.* Editorial Media.

WISNIEWSKI, P.M. y GUTIÉRREZ BANEGAS, A.L. (2003): *Introducción a las Matemáticas Universitarias*. Ed. McGraw-Hill.